T.D. de Probabilités et Statistiques

Licence Informatique

Gilles HUNAULT, 1998

T.D. 2 : Dénombrements et Variables alétaoires

1. Probabilités conditionnelles avec 2 dés.
2. Probabilités de Fiabilité d'un réseau téléphonique.
3. Probabilités conditionnelles chez un programmeur
4. Formule de Bayes "pour les jeunes"
5. Comparaison de probabilités et formule de *Poincaré* généralisée
6. Calcul du nombre d'applications, injections...
7. Démonstration de $C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{n} (C_x^k)^2$ via $C_{n_1+n_2}^k = \sum_{k_1+k_2=k} C_{n_1}^{k_1} C_{n_2}^{k_2}$.

1. Probabilités conditionnelles avec 2 dés

Enoncé

On dispose de deux dés normaux à 6 faces et d'une pièce de monnaire usuelle. L'un des deux, nommé A comporte 4 faces rouges et 2 blanches ; l'autre, nommé B comporte 2 faces rouges et 4 blanches. On invente la règle suivante : *"on lance la pièce. si on obtient pile, on joue toujours avec le dé nommé* A*. si c'est face, on joue toujours avec le dé nommé* B*"*.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir rouge en un lancer ?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir rouge au troisième lancer du dé alors qu'on a déjà obtenu rouge au premier et au deuxième lancer ?

   Notant R_i l'évènement "on a obtenu rouge au i-ème coup", R_1 et R_2 sont-ils indépendants ? idem pour $R_1|A$ et $R_2|A$.

c) Quelle est la probabilité d'avoir utilisé le dé A alors que sur n lancers, on a obtenu rouge n fois rouge ?

Solution

a) Obtenir rouge (noté R) se fait soit avec le dé nommé A soit avec le dé nommé B d'où la décomposition $R = (R \cap A) \sqcup (R \cap B)$. On calcule bien sur $p(R \cap A)$ par $p(R \cap A) = p_{|A}(R).p(A)$ et $p(R \cap B)$ par une formule équivalente. On obtient donc

$$\begin{aligned} p(R) &= p(R|A)p(A) + p(R|B)p(B) \\ &= (4/6)(1/2) + (2/6)(1/2) \\ &= 1/2. \end{aligned}$$

b) Pour obtenir rouge au troisème lancer du dé alors qu'on a déjà obtenu rouge au premier et au deuxième lancer, on nomme R_i l'évènement "on a obtenu rouge au i-ème coup". La probabilité cherchée est alors $p(R_3|R_1 \cap R_2)^*$, soit tout simplement $p(R_3 \cap R_1 \cap R_2)/p(R_1 \cap R_2)$. Maintenant, comme $p(R_1 \cap R_2) = p(R_1 \cap R_2|A).p(A) + p(R_1 \cap R_2|B).p(B)$, $p(R_1 \cap R_2)$ vaut $(2/3)^2.1/2 + (1/3)^2.1/2 = 5/18$.

* Cette notation n'est pas ambigue et il n'est pas nécessaire d'écrire $p(\ R_3|(R_1 \cap R_2)\ )$ car $p(\ (R_3|R_1)\ \cap R_2\ )$ n'a aucun sens.

De même, $p(R_3 \cap R_1 \cap R_2) = (2/3)^3.1/2 + (1/3)^3.1/2 = 1/6$ et donc la probabilité cherchée est $(1/6)/(5/18)$ soit $3/5$.

Puisque $p(R_1) = p(R_2) = p(R_i) = 1/2$ et $p(R_1 \cap R_2) = 5/18$. on en déduit que R_1 et R_2 ne sont pas indépendants. Par contre la question *$R_1|A$ et $R_2|A$ sont-ils indépendants ?* n'a aucun sens : $R_1|A$ et $R_2|A$ ne sont pas des évènements.

c) Avec les notations précédentes, on cherche à déterminer $p(A|\bigcap_{i=1}^{n} R_i)$, ce qu'on peut calculer par $p(\bigcap_{i=1}^{n} R_i|A).p(A)/p(\bigcap_{i=1}^{n} R_i)$. En généralisant les formules obtenues en a) et b), on obtient simplement

$$\frac{(2/3)^n.1/2}{(2/3)^n.1/2 + (1/3)^n.1/2}$$

soit encore $2^n/(2^n+1)$ de limite 1 pour n infini, ce qui est "raisonnable".

2. Fiabilité d'un réseau téléphonique

Enoncé

Une compagnie de messagerie téléphonique assure que son réseau en fibre optique est si fiable que lorsqu'on compose correctement le numéro, on a 19 chances sur 20 d'obtenir la tonalité chez le correspondant désiré.

a) quelle est la probabilité d'obtenir pour la première fois la tonalité chez le correspondant désiré au bout de 3 essais au plus si à chaque fois on compose le bon numéro ?

b) toutefois, on estime que pour le premier appel, on a 1 chance sur 10 que l'utilisateur fasse une fausse numérotation, que pour la deuxième fois il y ait 1 chance sur 100 de fausse numérotation et que pour la troisième fois il y ait 1 chance sur 1000 de fausse numérotation. Quelle est la probabilité d'obtenir le correspondant au bout du fil en 3 essais au plus compte-tenu de la fiabilité du réseau ?

Solution

Dire "3 essais au plus" (évènement X) signifie "1 essai exactement" (disons A) ou "2 essais exactement" (B) ou "3 essais exactement" (C) et ce, de façon disjointe (exclusive). Soit S_i l'évènement "*on a la tonalité chez le bon correspondant à l'essai i* (dont la probabilité, constante, vaut $p = 19/20$ pour tout i), alors $A = S_1$, $B = \overline{S_1} \cap S_2$, $C = \overline{S_2} \cap S_3$. On peut donc écrire

$$
\begin{aligned}
p(X) &= p(A \sqcup B \sqcup C) \\
&= p(A) + p(B) + p(C) \\
&= p + (1-p)p + (1-p)^2 p \\
&= 19/20 + 1/20.19/20 + (1/20)^2.19/20 \\
&= 7999/8000 \simeq 99.98\ \%
\end{aligned}
$$

Il y a un piège dans l'énoncé ! Obtenir la tonalité chez le correspondant, ce n'est pas obtenir le correspondant. Notons B_i "on réalise une bonne numérotation au i-ième coup". On va essayer de calculer la probabilité de l'évènement "on obtient la tonalité chez le correspondant" seulement. On obtient cette tonalité si on compose le bon numéro et si le réseau est fiable. L'évènement A doit alors s'érire $A = S_1 \cap B_1$ et B devient $B = (\overline{S_1} \cap B_1 \sqcup \overline{B_1}) \cap B_2 \cap S_2$. Enfin, C devient $Y \cap B_3 \cap S_3$ où $Y = (\overline{S_1} \cap B_1 \sqcup \overline{B_1}) \cap (\overline{S_1} \cap B_2 \sqcup \overline{B_2})$. Numériquement, $p(A) = p(1-q_1) = 19/20.9/10$, $p(B) = ((1-p)(1-q_1)+q_1)(1-q_2)p = (1/20.9/10 + 1/10).99/100.19/20$, $p(C) = (1/20.9/10 + 1/10).(1/20.99/100 + 1/100).999/1000.19/20$. Le total de ces trois probabilités donne 99.96 % soit un résultat très peu différent du précédent.

3. Probabilités conditionnelles chez un programmeur

Enoncé

Un programmeur en assembleur estime qu'il a une probabilité $p/8$ d'avoir mis un cycle de trop dans un calcul de décalage de registres, calcul qui se décompose en 8 sous-programmes. Ce programmeur a relu en détail les 7 premiers premiers sous-programmes et il n'a pas trouvé de cycle en trop. Quelle est la probabilité $f(p)$ que le cycle de trop soit dans le 8ième sous-programme ?

Solution

Notons S_i l'évènement *"l'erreur est dans le sous-programme numéro* i où i varie de 1 à 8. Le nombre $f(p)$ demandé correspond à la probabilité conditionnelle $p(S_8|_T)$ si T désigne l'évènement $\bigcap_{j=1}^{j=7} \overline{S}_j$. Comme l'énoncé ne précise rien, nous supposerons les sous-programmes équi-probables.

Les sous-programmes définissent un système complet d'évènements, donc

$$p(T) = 1 - p(\bigsqcup_{j=1}^{j=7} S_j) = 1 - 7.(p/8)$$

d'où $f(p) = (p/8)/(1 - 7p/8)$ soit $f(p) = p/(8 - 7p)$.

4. Formule de Bayes "pour les jeunes"

Enoncé

Une récente enquête auprès de jeunes "ché(e)brans" montre que les DeuxSontTrois sont un groupe "firimique". L'enquête a porté sur 3 groupes de jeunes, notés A, B et J. Le nombre de personnes interrogées dans chaque groupe et le nombre de voix pour le groupe est fourni dans le tableau suivant

	Nombre de jeunes	% de "pour" dans le groupe
Groupe A	160	60
Groupe B	240	40
Groupe J	400	48

Justifiez vos réponses aux questions suivantes

6.a) Quelle est la probabilité qu'un jeune au hasard dans A,B ou J soit pour le groupe ?

6.b) Sachant qu'un jeune est pour le groupe, quelle est la probabilité qu'il soit dans le groupe A ?

Solution

Soit F l'évènement on est pour le groupe. Comme A, B et J forment un système complet d'évènements

$$F = F \cap (\ A \sqcup B \sqcup J\ ) = (F \cap A) \sqcup (F \cap B) \sqcup (F \cap J)$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned} p(F) &= p(A)p(F|A) + p(B)p(F|B)\ +\ p(J)p(F|J) \\ &= \text{(160/800)0,6 + (240/800)0,4 + (400/800)0,48} \\ &= \text{0,2x0,6 + 0,3x0,4 + 0,5x0,48} \\ &= \text{0,48} \end{aligned}$$

Comme $p(A|F) = p(A)p(F|A)/(\ p(A)p(F|A) + p(B)p(F|B) + p(J)p(F|J)\ )$, on obtient

$$(160/800)x0,6/((160/800)x0,6 + (240/800)x0,4 + (400/800)x0,48)$$

donc $p(A|F)$ vaut 0,2x0,6/(0,2x0,6+0,3x0,4+0,5x0,48) soit finalement 0,25.

Enoncé

Soient $(E, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé, A, B, C des sous-ensembles de E. On note $\overline{X}$ le complémentaire de X dans E et on suppose donnés n sous-ensembles de E notés A_i pour i de 1 à n.

a) Comparer à l'aide de $\leq$ les nombres $p(A \cap B)$ et $p(A) - p(\overline{B})$.

b) Comparer à l'aide de $\leq$ les nombres $p(A \cap B \cap C)$

et $1 - p(\overline{A}) - p(\overline{B}) - p(\overline{C})$.

c) Comparer à l'aide de $\leq$ les nombres $p(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$ et $1 - \sum_{i=1}^{n} p(\overline{A}_i)$.

d) Peut-on en déduire $p(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \ \geq \ \sum_{i=1}^{n} p(A_i)$?

Solution

Par définition d'une probabilité p, on a $p(X) \leq 1$ pour tout X. Prenant $X = A \cup B$ et avec la formule classique $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ on en déduit aisément $p(A) + p(B) - p(A \cap B) \leq 1$ soit, en passant $p(A \cap B)$ à droite et en remplaçant $p(B) - 1$ par $-p(\overline{B})$:

$$p(A) - p(\overline{B}) \leq p(A \cap B)$$

Cette formule s'écrit aussi $1 - p(\overline{A}) - p(\overline{B}) \leq p(A \cap B)$.

Si maintenant on écrit $p(A \cap B \cap C)$ sous la forme $p(\ (A \cap B) \cap C \ )$, avec le résultat précédent, on a $p(A \cap B) - p(\overline{C}) \leq p(A \cap B \cap C)$ et en réapplicant la même formule : $p(A) - p(\overline{B}) - p(\overline{C}) \leq p(A \cap B \cap C)$ soit finalement, en remplaçant $p(A)$ par $1 - p(\overline{A})$:

$$1 - p(\overline{A}) - p(\overline{B}) - p(\overline{C}) \leq p(A \cap B \cap C)$$

Puisque $1 - p(\overline{A_1}) - p(\overline{A_2}) \leq p(A_1 \cap A_2)$, supposant $1 - \sum_{i=1}^{n-1} p(\overline{A}_i) \leq p(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)$

$$\begin{aligned}
\text{alors } p(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) &= p(\,(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \cap A_n\,) \\
&\geq p(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) - p(\overline{A_n}) \\
&\geq 1 - \sum_{i=1}^{n-1} p(\overline{A}_i) - p(\overline{A_n}) \\
&= 1 - \sum_{i=1}^{n} p(\overline{A}_i)
\end{aligned}$$

La relation

$$1 - \sum_{i=1}^{n} p(\overline{A}_i) \leq p(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$$

est donc démontrée par récurence. On ne peut bien sûr pas en déduire $p(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \geq \sum_{i=1}^{n} p(A_i)$ puisque c'est la relation inverse qui est vraie déjà à l'ordre deux : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \leq p(A) + p(A)$.

On montre par récurence en écrivant $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cup A_n$ que

$$p(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} p(A_i)$$

La formule dite de *Sylvester* est

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \left| \bigcap A_{i_k} \right|$$

où $|X|$ désigne le cardinal de l'ensemble X. Elle se démontre aussi par récurence. On en déduit la formule de *Poincaré* généralisée:

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < \ldots < i_k} p\left(\bigcap A_{i_k} \right)$$

Enoncé

Soit E un ensemble à n éléments et F un ensemble p éléments. Combien y a-t-il d'applications de E dans F ? d'injections, de surjections, de bijections ? Comment seraient les produits cartésiens correspondants pour n et p de 1 à 10 ?

Solution

Il y a bien sûr p^n applications dont $A(p,n) = p!/(p-n)!$ injections , $n!$ bijections et $\sum_{k=0}^{p}(-1)^k C_p k (p-k)^n$ surjections.

Le nombre de surjections $surj(n,p)$ vérifie la relation

$$surj(n,p) = p.(\ surj(n-1,p) + surj(n-1,p-1)\ )$$

Voici quelques exemples numériques de valeurs.

```
 Nombre de fonctions de E dans F avec card(E) = n et card(F) = p

    n       p    appli.   injec.   surjec.  bijections
    5       1         1        0         1           0
    5       2        32        0        30           0
    5       3       243        0       150           0
    5       4      1024        0       240           0
    5       5      3125      120       120         120
    5       6      7776      720         0           0
    5       7     16807     2520         0           0
    5       8     32768     6720         0           0

    n       p    appli.   injec.   surjec.  bijections
    1       5         5        5         0           0
    2       5        25       20         0           0
    3       5       125       60         0           0
    4       5       625      120         0           0
    5       5      3125      120       120         120
    6       5     15625        0      1800           0
    7       5     78125        0     16800           0
    8       5    390625        0    126000           0
```

Applications

n	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	1	4	9	16	25
3	1	8	27	64	125
4	1	16	81	256	625
5	1	32	243	1024	3125

Injections

n	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	0	2	6	12	20
3	0	0	6	24	60
4	0	0	0	24	120
5	0	0	0	0	120

Surjections

n	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	1	2	0	0	0
3	1	6	6	0	0
4	1	14	36	24	0
5	1	30	150	240	120

Bijections

n	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	0	2	0	0	0
3	0	0	6	0	0
4	0	0	0	24	0
5	0	0	0	0	120

Enoncé

Montrer que $C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{n} (C_\alpha^k)^2$ pour α bien choisi dépendant de n.

Solution

Considérons le produit $(1+x)^{n_1}.(1+x)^{n_2}$. Remplaçons le premier terme par le développement $\sum_{k_1=0}^{n_1} C_n^{k_1} x^{k_1}$ et le deuxième terme par le développement $\sum_{k_2=0}^{n_2} C_n^{k_2} x^{k_2}$. Pour obtenir x^k dans le produit des deux développements, il faut considérer tous les x^{k_1} et les x^{k_2} avec $k_1 + k_2 = k$. Le coefficient de x^k est donc $C_{n_1+n_2}^k = \sum_{k_1+k_2=k} C_{n_1}^{k_1} C_{n_2}^{k_2}$. Applicant cette formule à $n_1 = n_2 = n = k$ on en déduit $C_{2n}^n = \sum_{k_1+k_2=n} C_{n_1}^{k_1} C_{n_2}^{k_2}$. Remplaçant k_1 par k et donc k_2 par n_k, puisque $C_n^{n-k} = C_n^k$, on a finalement $C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$ **Enoncé**

Comment calculer $p(n) = a.p(n-1) + b$ en temps constant, $p(0) = \beta$ étant donné ?

Solution

D'abors, il faut vérifier qu'à chaque fois $p(n)$ est une probabilité, c'est à dire que $p(n)$ est positif ou nul, inférieur à 1. Se poserait aussi la question de vérifier que la somme des $p(n)$ fait 1. Si on admet que ces vérifications ont été faites, on ne doit pas programmer un calcul itératif direct comme

```
p <-- beta
pour k de1a n
   p <-- p * a + b
fin pour k
```

qui effectue le calcul en temps proportionnel à n mais passer par la formule close. Rappelons la méthode : on associe à $p_n = p(n)$ une suite w_n géométrique, de même raison a que p_n et décalée de p_n par une constante : $w_n = p_n + \alpha$. Remplaçant p_n et p_{n-1} par leur expression en fonction de w_n et w_{n-1} dans $p_n = a.p_{n-1} + b$, on en déduit que α vaut $b/(a-1)$. Puisque (w_n) est géométrique, $w_n = a^n w_0 = a^n(p_0 + \alpha) = a^n(\beta + \alpha)$.

On en déduit donc $p_n = a^n(\beta + \alpha) - \alpha$. Le calcul exact de a^n doit pouvoir se faire via les fonctions *log* et *exp*, d'où les instructions de calcul

```
# a,b, beta et n sont connus
alpha <--  b/(a-1)
puiss <--  exp( n*log(a) )
p     <--  (beta+alpha)*puiss - alpha
```

Enoncé

Rappeler comment sont nommés et comment sont définis les indicateurs et phénomènes désignés par les symboles $\mathcal{T}_E$, p, X, p_X, m et σ

Solution E est l'espace des épreuves et $\mathcal{T}_E$ est l'univers ou espace des évènements. p est une **fonction** de $\mathcal{T}_E$ dans $[0, 1]$ souvent définie sur une partition E_i de E. X est une fonction sur $\mathcal{T}_E$ à valeurs dans R. $p_X(A)$ est en fait $p(X^{-1}(A))$.

m est un indicateur numérique global de tendance générale ou centrale, nommé valeur moyenne ou plus simplement moyenne. σ est un indicateur numérique global de dispersion nommé écart-type ou aussi écart-standard.