Rappels de géométrie euclidienne. Les configurations

Paul Milan

LMA Seconde le 1er avril 2012

Table des matières

1 Rappels de géométrie euclidienne

1.1 Euclide

Un des premiers pensionnaires du Muséum d'Alexandrie, communauté scientifique ayant pour but de rassembler dans un même lieu tout le savoir du monde au troisième siècle avant notre ère.

Euclide, à travers un ensemble de 13 livre « *Les éléments* », fait le point sur les connaissances en géométrie plane, sur la théorie des nombres puis sur la géométrie dans l'espace.

De plus Euclide codifie la démonstration mathématique qui est toujours en usage aujourd'hui. Elle est basée sur le schéma suivant :

On sait que : hypothèses de l'énoncé, définitions, postulat
Or : propriétés, théorème
Donc : ce que l'on veut montrer.

1.2 Éléments du plan

Le plan Euclidien est infini dans les deux dimensions qui le compose. Il n'y a pas de repère, innovation qui viendra beaucoup plus tard au XVII^e siècle avec Descartes.

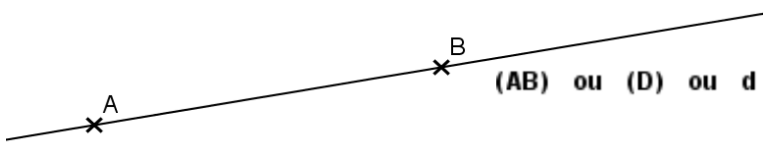
a) Le point

Élément du plan qui n'a pas de partie. Il est noté par une majuscule : A, B, C,...
Si l'on veut désigner un point inconnue : M, N, ...

b) La droite

Une droite est définie par deux points. Elle est illimitée à chaque extremité.

Notation : Si la droite est déterminée par les points A et B, on note la droite (AB). On peut noter une droite par une majuscule (D), (Δ) (noter la présence de parenthèse pour ne pas confondre la droite avec un point) ou une minuscule d, δ (les parenthèse ne sont pas nécessaires).



Rapport entre deux droites

1) Deux droite d_1 et d_2 peuvent être parallèles. Elles n'ont aucun point commun ou elles sont confondues :

$$d_1 // d_2 \quad \Leftrightarrow \quad d_1 \text{ et } d_2 \text{ n'ont aucun point commun ou } d_1 = d_2$$

2) Deux droite peuvent être sécante si elles ne sont pas parallèles. Elles se coupent alors en un point.

Si trois droites se coupent en un point, elles sont concourantes.

3) Deux droite peuvent être perpendiculaires si elle se coupe en angle droit. On note alors $d_1 \perp d_2$

Si deux droites sont perpendiculaires à une troisièmes elles sont parallèles entre elles.

$$\left.\begin{array}{l} d_1 \perp d_3 \\ d_2 \perp d_3 \end{array}\right\} \quad \text{alors} \quad d_1 // d_2$$

c) Demi-droite

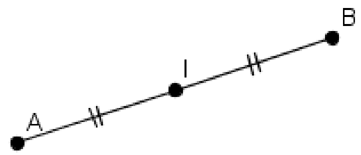
Une demi-droite est une droite limitée à une extrèmité. Si une demi-droite est limitée en A et passe par B, on la note $[AB)$.

d) Le segment

Un segment est une droite limitée aux deux extrèmités. Si le segment est limité en A et B, il est noté $[AB]$.

Si le plan est doté d'une unité de mesure, on note AB la distance entre A et B.

Le milieu d'un segment, divise celui-ci en deux parties égale. Si I est le milieu du segment $[AB]$, on note $I = m[AB]$.

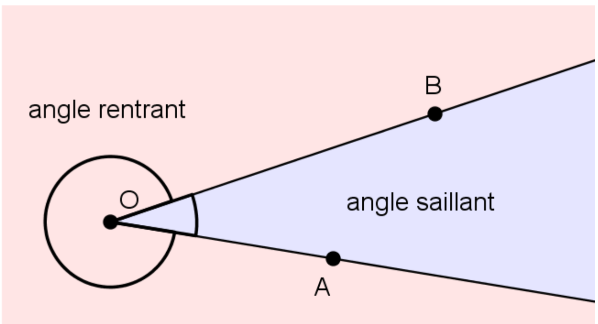


$$AI = IB = \frac{AB}{2}$$

e) L'angle

Un angle est un secteur du plan délimité par deux demi-droites. On distingue alors deux types d'angles :

- Les angles saillants (ou géométriques) notés : $\widehat{AOB}$ compris entre 0 et 180°.
- Les angles rentrants compris entre 180°et 360°



Angles saillants

On distingue parmi les angles saillants, les types suivants :

- Les angles aigus : compris entre $0°$et $90°$
- Les angles droits : $90°$
- Les angles obtus : compris entre $90°$et $180°$
- Les angles plats : $180°$

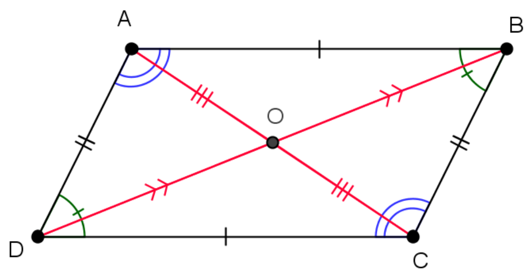
On dit que deux angles sont complémentaires, supplémentaires si leur somme vaut respectivement $90°$et $180°$.

$$\alpha+\beta=90 \qquad \alpha \text{ et } \beta \text{ sont complémentaires}$$
$$\alpha+\beta=180 \qquad \alpha \text{ et } \beta \text{ sont supplémentaires}$$

1.3 Les quadrilatères

a) Parallélogramme

Il existe 6 définitions, toutes équivaventes, du parallélogramme.



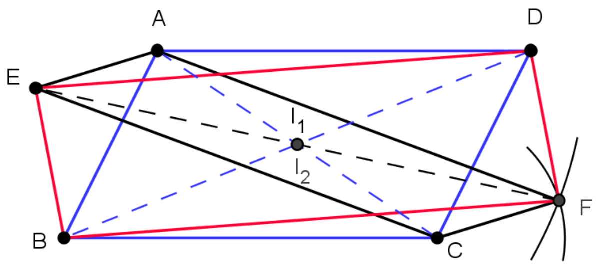
1) Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont deux à deux parallèles.
2) Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont deux à deux de même longueur.
3) Un parallélogramme est un quadrilatère dont deux côtés sont parallèles et de même longueur.
4) Un parallélogramme est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu.
5) Un parallélogramme est un quadrilatère dont deux angles consécutifs quelconques sont supplémentaires.
6) Un parallélogramme est un quadrilatère dont les angles opposés sont égaux deux à deux.

Un parallélogramme admet un point de symétrie : l'intersection des diagonales appelée **centre du parallélogramme**.

Applcation

Soit A, B, C, D, E et F six points tels que $ABCD$ et $AECF$ soient des parallélogrammes. Démontrer que le quadrilatère $EBFD$ est un parallélogramme.

Faisons une figure : On trace un parallélogramme $ABCD$, on place le point E, puis on détermine F tel que $AECF$ soit un parallélogramme.



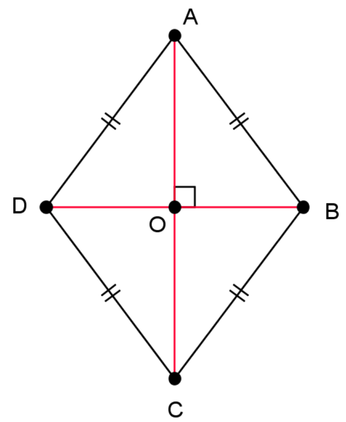
Applcation

Soit I_1 le centre de $ABCD$. Comme $ABCD$ est un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu donc I_1 est le milieu de $[AC]$ et $[BD]$.
Soit I_2 le centre de $AECF$. Comme $AECF$ est un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu donc I_2 est le milieu de $[AC]$ et $[EF]$.
Comme I_1 et I_2 sont le milieu de $[AC]$, on en déduit que $I_1 = I_2$.
Comme $I_1 = I_2$ alors $[BD]$ et $[EF]$ ont le même milieu. Les diagonales de $EBFD$ se coupent en leur milieu donc $EBFD$ est un parallélogramme.

b) Le losange

Les 4 définitions sont équivalentes.

1) Un losange est un quadrilatère dont les 4 côtés sont de même longueur.
2) Un losange est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu perpendiculairement.
3) Un losange est un parallélogramme dont deux côtés consécutifs sont de même longueur.
4) Un losange est un parallélogramme dont les digonales sont perpendiculaires

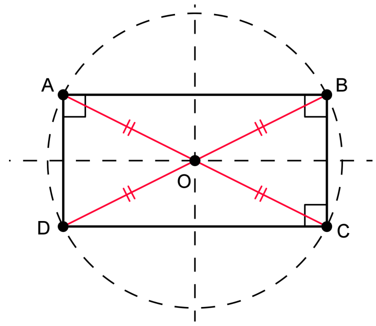


Un losange possède un centre de symétrie : le centre du losange et un axe de symétrie : les diagonales. Les diagonales sont les bissectrices des angles formés par 2 côtés consécutifs.

c) Le rectangle

Les 4 définitions sont équivalentes.

1) Un rectangle est un quadrilatère qui a trois angles droits.
2) Un rectangle est un quadrilatère dont les diagonales sont de même longueur et qui se coupent en leur milieu.
3) Un rectangle est un parallélogramme qui a 1 angle droit.
4) Un rectangle est un parallélogramme dont les diagonales sont de même longueur.

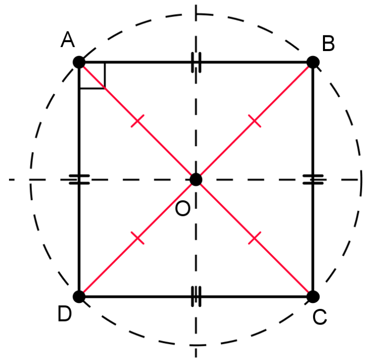


Un rectangle possède un centre de symétrie : le centre du rectangle et deux axes de symétrie : les médiatrices des côtés. Comme les diagonales sont de même longueur et se coupent en leur milieu, un rectangle est inscriptible dans un cercle.

d) Le carré

Les trois définitions sont toutes équivalentes.

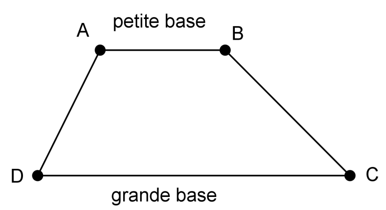
1) Un carré est un losange et un rectangle.
2) Un carré est un quadrilatère qui a ses 4 côtés de même longueur et 1 angle droit.
3) Un carré est un quadrilatère dont les diagonales de même longueur, qui se coupent en leur milieu perpendiculairement.



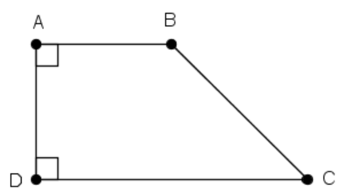
Un carré possède un centre de symétrie : le centre du carré et 4 axes de symétrie : les deux diagonales et les médiatrices des côtés. Un carré est un quadrilatère régulier.

e) Le trapèze

Un trapèze est un quadrilatère qui a 2 côtés parallèles. Ces 2 côtés parallèles sont appelés les « bases » du trapèze.



Un trapèze rectangle est un trapèze qui possède un augle droit.



Un trapèze isocèle est un trapèze dont les deux bases ont même médiatrice. Il possède alors un axe des symétrie.

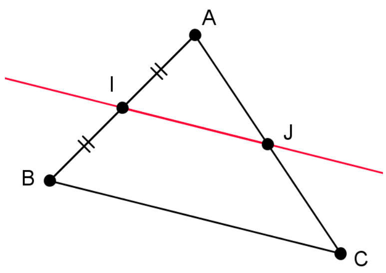
2 Droites dans un triangle

2.1 Le théorème des milieux

a) Le théorème direct

Théorème 1 *Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est parallèle à un deuxième côté coupe le troisième en son milieu.*

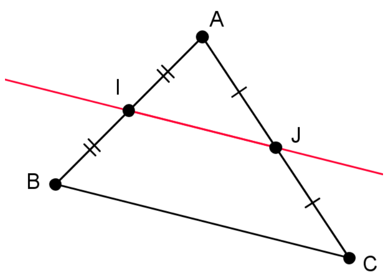
$$\textit{Si} \quad I = m[AB] \quad \textit{et si} \quad (IJ)//(BC) \quad \textit{alors} \quad J = m[AC] \quad \textit{et} \quad IJ = \frac{1}{2}BC$$



b) La réciproque du théorème des milieux

Théorème 2 *Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu de deux côtés est parallèle au troisième.*

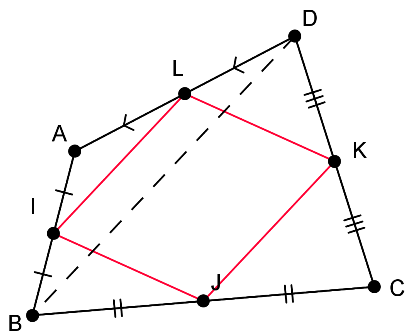
$$\textit{Si} \quad I = m[AB] \quad \textit{et si} \quad J = m[AC] \quad \textit{alors} \quad (IJ)//(BC) \quad \textit{et} \quad IJ = \frac{1}{2}BC$$



Applcation

Quadrilatère de Varignon (1654 - 1722) : *Soit ABCD est quadrilatère quelconque. Soit I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA]. Quelle la nature du quadrilatère IJKL ?*

Faisons d'abord une figure :



Applcation

- Dans le triangle ABD, on sait que I est le milieu de $[AB]$ et L le milieu de $[AD]$, donc d'après la réciproque du théorème des milieux, on a :

$$(IL)//(BD) \quad \text{et} \quad IL = \frac{1}{2}BD \qquad \text{prop 1}$$

- Dans le triangle BDC, on sait que J est le milieu de $[BC]$ et K le milieu de $[CD]$, donc d'après la réciproque du théorème des milieux, on a :

$$(JK)//(BD) \quad \text{et} \quad JK = \frac{1}{2}BD \qquad \text{prop 2}$$

Des propriétés 1 et 2, on en déduit :

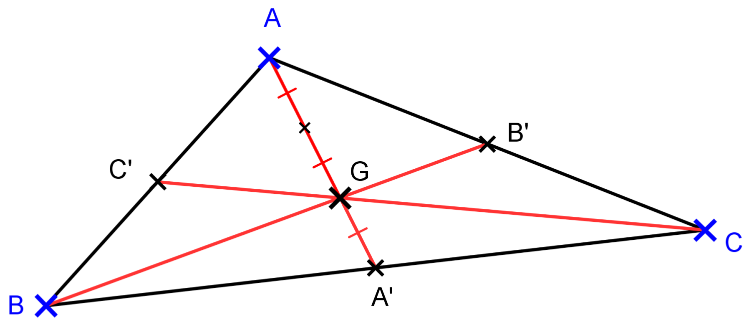
$$(IL)//(JK) \quad \text{et} \quad IL = JK$$

Donc le quadrilatère $ILKL$ possède deux côtés parallèles de même longueur, donc $IJKL$ est un parallèlogramme.

Pour aller plus loin :
Quelle condition doit vérifier $ABCD$ pour que $IJKL$ soit :
a) un rectangle b) un losange c) un carré

2.2 Les médianes

Définition 1 *Une médiane d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et par le milieu du côté opposé.*
Propriété : Les trois médianes sont concourantes en un point G appelé le centre de gravité. Il est situé au deux tiers du sommet ou à un tiers de la base.

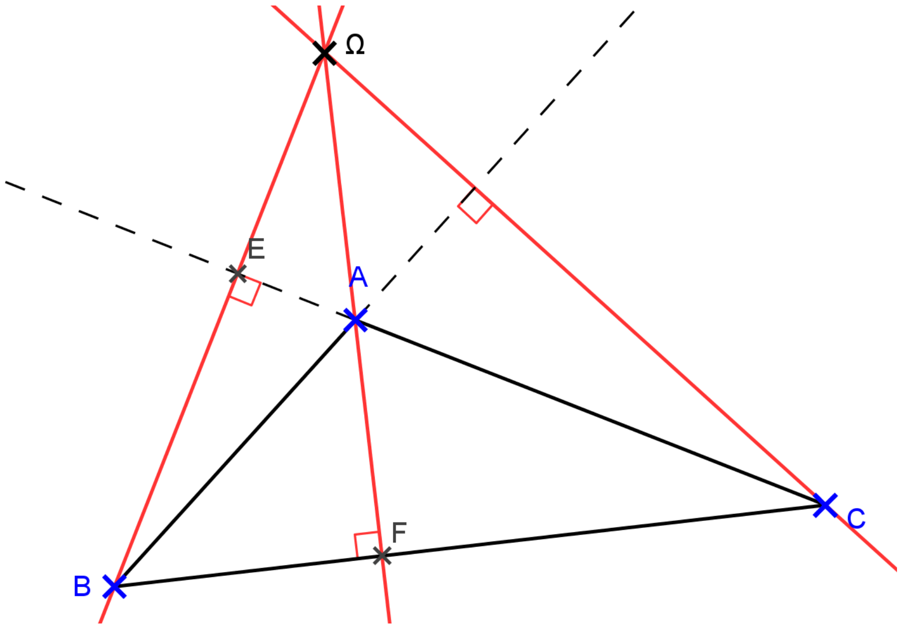


On peut effectuer cette figure à la règle et au compas en déterminant les milieux A', B' et C' des côtés du triangle en traçant les médiatrices respectives de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

$$AG = \frac{2}{3}AA' \qquad A'G = \frac{1}{3}AA'$$

2.3 Les hauteurs

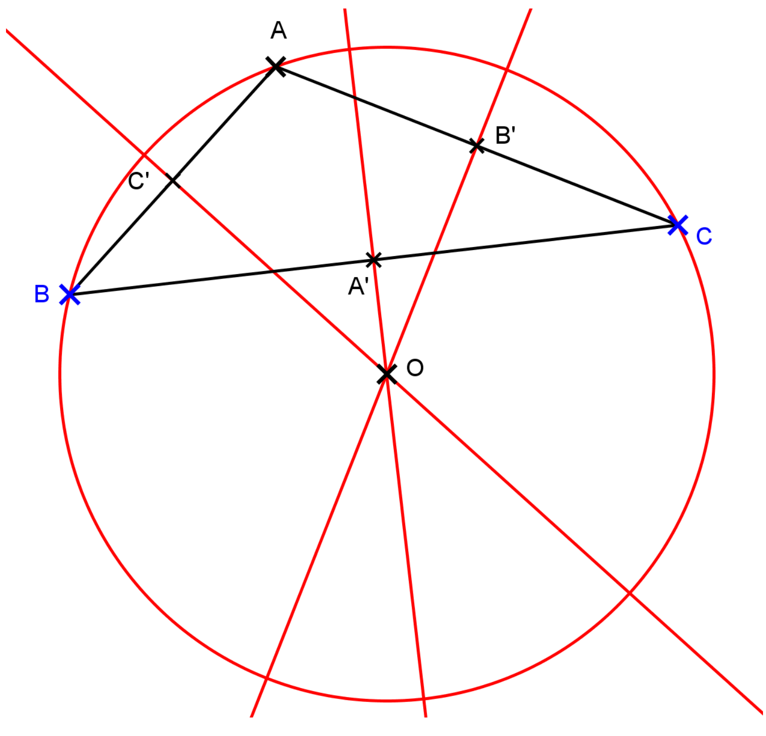
Définition 2 *Une hauteur d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé.*
Propriété : les trois hauteurs sont concourantes en un point Ω appelé orthocentre.



On peut effectuer cette figure à la règle et au compas en traçant les perpendiculaires en utilisant la construction de la médiatrice. De plus, contrairement au centre de gravité, l'orthocentre peut être à l'extérieur du triangle comme on peut le remarquer sur la figure ci-dessus. Il est à noter que pour tracer certaines hauteurs, il est nécessaire de prolonger les côté du triangle. Cela se produit lorsque l'angle au sommet est supérieur à 90°.

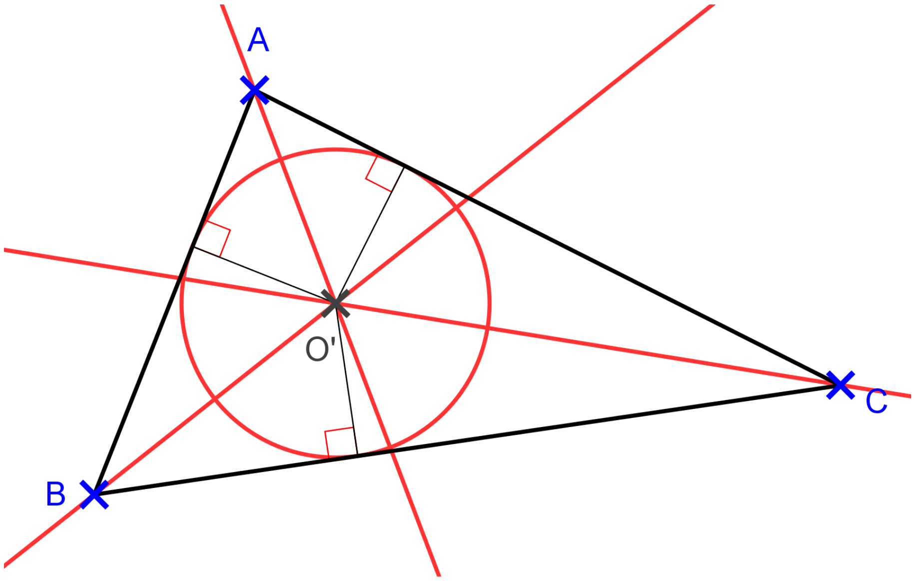
2.4 Les médiatrices

Définition 3 *La médiatrice d'un segment* $[AB]$ *est la droite dont les points sont équidistants des points A et B. Elle coupe alors ce segment en son milieu perpendiculairement.*
Propriété : Les trois médiatrices d'un triangle sont concourante en un point O appelé le centre du cercle circonscrit.



2.5 Les bissectrices

Définition 4 *La bissectrice d'un angle divise celui-ci en deux parties égales.*
Propriété : Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes en un point O' appelé centre du cercle inscrit.



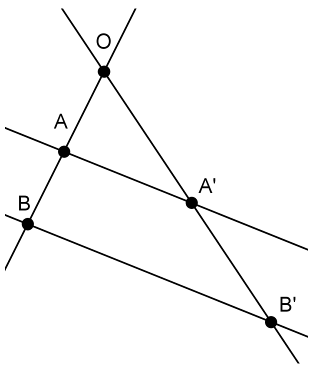
2.6 Le théorème de Thalès

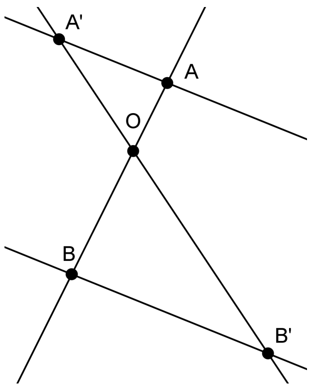
a) Théorème direct

Théorème 3 *: Soit deux droites (AB) et $(A'B')$ sécante en O.*

$$\text{Si} \quad (AA')//(BB') \quad \text{alors, on a :} \quad \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{AA'}{BB'}$$

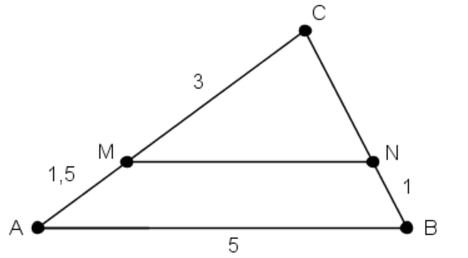
On peut avoir les deux configurations suivantes :





Exemple

Dans la figure ci-dessous, on a $(MN)//(AB)$. À l'aide des indications portées sur la figure, calculer CN et MN.



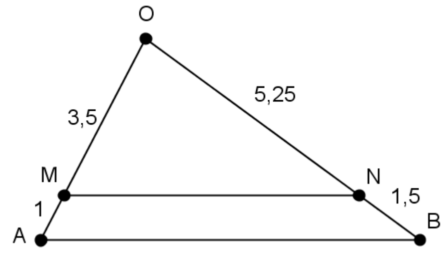
Comme $(MN)//(AB)$, nous avons une configuration de Thalès, donc
$$\frac{CM}{CA} = \frac{CN}{CB} = \frac{MN}{AB}$$
Si on pose $x = CN$, de la première égalité, on a :
$$\frac{3}{4,5} = \frac{x}{x+1}$$
On fait un produit en croix,
$$\begin{aligned} 3(x+1) &= 4,5x \\ 3x+3 &= 4,5x \\ 3x-4,5x &= -3 \\ -1,5x &= -3 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

De la seconde égalité, on a :
$$\frac{3}{4,5} = \frac{MN}{5}$$
On fait un produit en croix,
$$MN = \frac{3 \times 5}{4,5} = \frac{15}{4,5} = \frac{10}{3}$$
Conclusion : on a $CN = 2$ et $MN = \dfrac{10}{3}$.

b) Réciproque du théorème de Thalès

Théorème 4 : *Soit O, A, B d'une part et O, A', B' d'autre part alignés dans cet ordre.*
$$\textit{Si} \quad \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} \quad \textit{alors, on a :} \quad (AA')//(BB')$$

On donne la figure ci-dessous, montrer que (AB) et (MN) sont parallèles.



Exemple

Calculons les deux rapports :

$$\frac{OM}{OA} = \frac{3,5}{4,5} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{ON}{OB} = \frac{5,25}{6,75} = \frac{21}{27} = \frac{7}{9}$$

On a donc : $\dfrac{OM}{OA} = \dfrac{ON}{OB}$

donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MN) et (AB) sont parallèles.

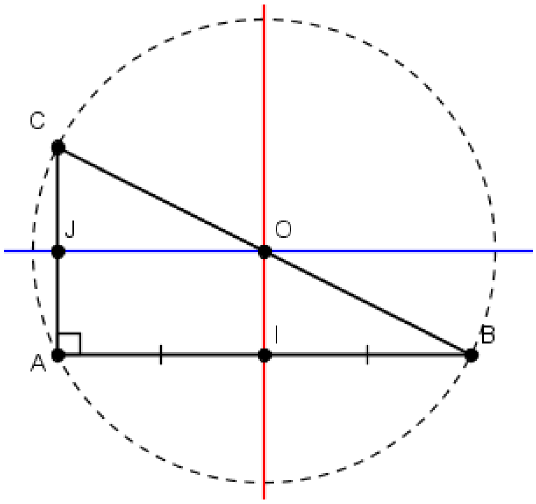
3 Le triangle rectangle

3.1 Centre du cercle circonscrit

Théorème 5 *Le centre du cercle circonscrit dans un triangle rectangle se trouve au milieu de l'hypoténuse.*
Réciproquement, le triangle ABC inscrit dans un cercle de diamètre $[BC]$ est rectangle en A

Démonstration :

1) Théorème direct.
Soit un triangle ABC rectangle en A. Soit I le milieu de $[AB]$ et O l'intersection de la droite passant par I et parallèle à (AC) avec le segment $[BC]$. J est l'intersection de la droite passant par O et parralèle à (AB) avec le segment $[AC]$. On a alors la figure suivante :

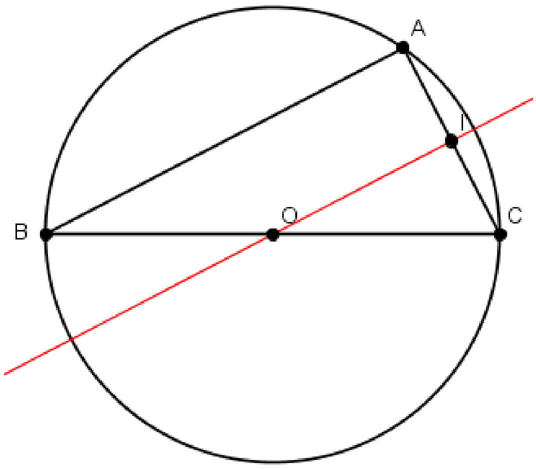


Comme I est le milieu de $[AB]$ et $(IO)//(AC)$, d'après le théorème des milieux, on a : O milieu de $[BC]$
Comme $(AB) \perp (AC)$ et $(IO)//(AC)$ alors on a : $(IO) \perp (AB)$.
De ces deux conclusion, on en déduit que (IO) est la médiatrice de $[AB]$.

Comme O est le milieu de $[BC]$ et $(OJ)//(AB)$, d'après le théorème des milieux, on a : J milieu de $[AC]$.
Comme $(AB) \perp (AC)$ et $(JO)//(AB)$ alors on a : $(JO) \perp (AC)$.
De ces deux conclusion, on en déduit que (JO) est la médiatrice de $[AC]$.

O est donc l'intersection des médiatrices, donc le milieu de l'hypoténuse est le centre du cercle circonscrit.

2) Réciproque.
Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O. Le triangle ABC est inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ et $[BC]$ est un diamètre. On appelle I le milieu de $[AC]$. On a alors la figure suivante :



Comme O est le centre du cercle circonscrit et I milieu de $[AC]$, alors la droite (OI) est la médiatrice de $[AC]$.
Comme O et I sont les milieux respectifs de $[BC]$ et $[AC]$, d'après le théorème des milieux, la droite (OI) est parallèle à (AB).
(OI) est la médiatrice de $[AC]$, donc $(AC) \perp (OI)$ et $(OI)//(AB)$, on en déduit que $(AC) \perp (AB)$. Le triangle ABC est rectangle en A.

3.2 Le théorème de Pythagore

a) Le théorème direct

Théorème 6 *Dans un triangle rectangle le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autre côtés. Si ABC est rectangle en A, on a donc :*

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

b) Sa réciproque

Théorème 7 *Si dans un triangle, le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle. Si le triangle ABC est tel que :*

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Alors le triangle ABC est rectangle en A

3.3 Trigonométrie dans le triangle rectangle

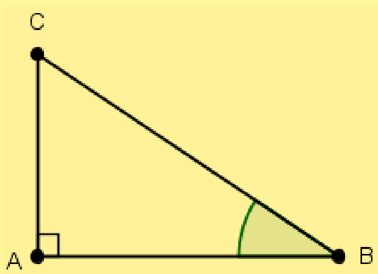
a) Définition

Définition 5 *Dans un triangle ABC rectangle en A, on définit les rapports suivants (qui ne dépendent que de la mesure des angles) :*

$$\sin \widehat{B} = \frac{\textit{côté opposé}}{\textit{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\cos \widehat{B} = \frac{\textit{côté adjacent}}{\textit{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan \widehat{B} = \frac{\textit{côté opposé}}{\textit{côté adjacent}} = \frac{AC}{AB}$$



b) Propriétés

Dans un triangle ABC rectangle en A, on a :

- Les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont complémentaires
- Comme le côté opposé à $\widehat{B}$ correspond au côté adjacent à $\widehat{C}$ et inversement, on a alors :

$$\sin \widehat{B} = \cos \widehat{C} \quad \text{et} \quad \cos \widehat{B} = \sin \widehat{C}$$

➻ On a les relations suivantes :

$$\tan \widehat{B} = \frac{\sin \widehat{B}}{\cos \widehat{B}}$$

$$\sin^2 \widehat{B} + \cos^2 \widehat{B} = 1$$

$$1 + \tan^2 \widehat{B} = \frac{1}{\cos^2 \widehat{B}}$$

c) Tableau des lignes trigonométriques remarquables

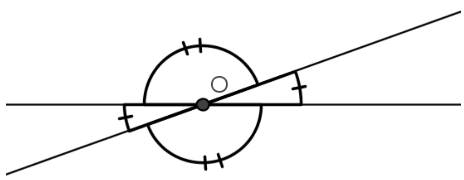
Angle	0 °	30 °	45 °	60 °	90 °
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	?

4 Les angles

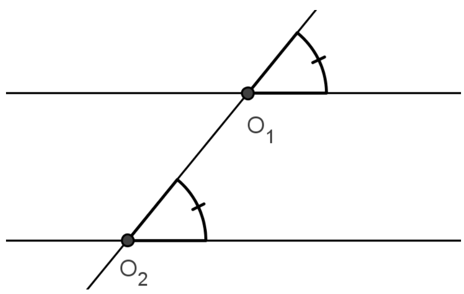
4.1 Égalité entre deux angles

On distingue 4 configurations où deux angles sont égaux

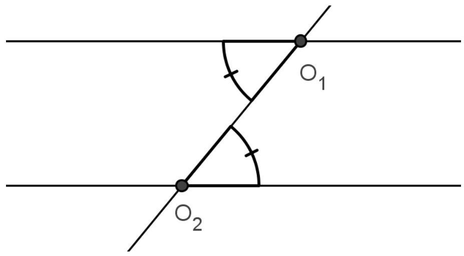
Opposés par le sommet



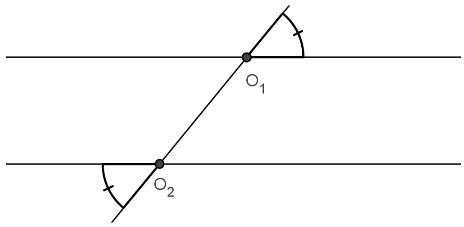
Correspondants



Alternes-internes



Alternes-externes



Application

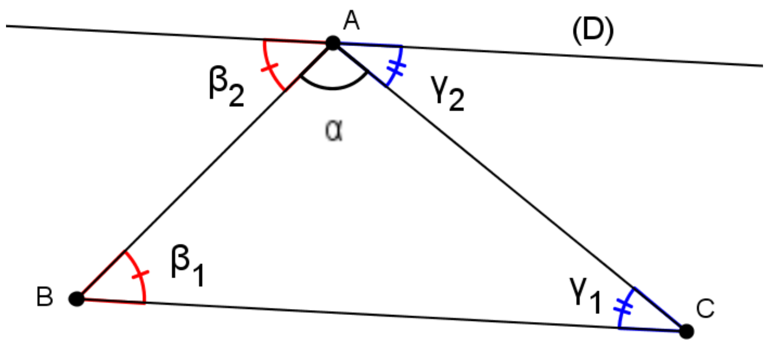
Démontrer que la somme des angles d'un triangle est égal à 180°.

Faisons d'abord un figure, sur laquelle on trace la droite (D) parallèle à (BC).

On a alors les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \beta_2 && \text{les angles sont alternes-internes}\\ \gamma_1 &= \gamma_2 && \text{les angles sont alternes-internes}\\ \beta_2+\alpha+\gamma_2 &= 180 \end{aligned}$$

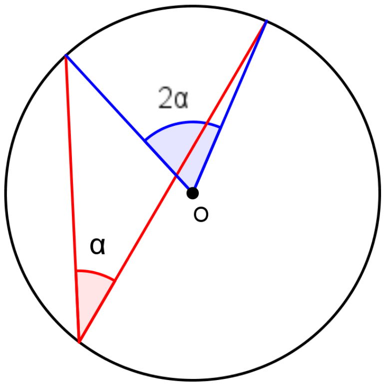
La somme des angles dans un triangle vaut donc 180°



4.2 Angles dans un cercle

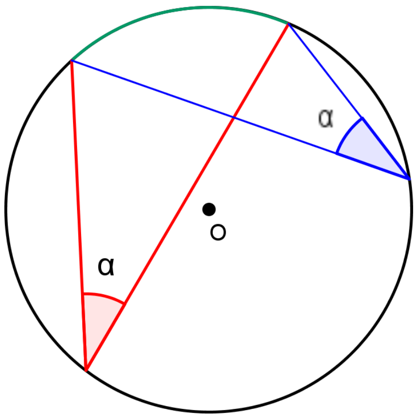
Angle inscrit et angle au centre

Théorème 8 *Dans un cercle, l'angle au centre vaut deux fois l'angle inscrit*



Angles inscrits

Théorème 9 *Dans un cercle, deux angles qui interceptent le même arc sont égaux.*



Tangente

Théorème 10 *Dans un cercle, la tangente en un point est perpendiculaire au rayon.*